* Η εξίσωση $x+1=3$, $\exists x\in \mathbb{N}$, δηλαδή υπάρχει x που να την ικανοποιεί

* Για την εξίσωση $x+2=1$, $\nexists x\in \mathbb{N}$
Για αυτό διευρύνω και παίρνω $x+2=1$, $x\in \mathbb{Z}$ δηλαδή δουλεύω στο σύνολο των ακεραίων

Ανάλογα για την εξίσωση $2q=1$ $\nexists q\in \mathbb{Z}$ αλλά $\exists q\in \mathbb{Q}$
δηλαδή δουλεύω στο σύνολο των ρητών

Ομοίως για την εξίσωση $x^2=2$, $\nexists x\in \mathbb{Q}$, αλλά $x^2=2$, $\exists x\in \mathbb{R}$
δουλεύω στο σύνολο των πραγματικών

Τέλος, για την εξίσωση $x^2=-1$, $\nexists x\in \mathbb{R}$ αλλά $x^2=-1$, $\exists x\in \mathbb{C}$
δηλαδή δουλεύω στο σύνολο των μιγαδικών

Δηλαδή, γενικά ισχύει $\mathbb{N}\subseteq \mathbb{Z}\subseteq \mathbb{Q}\subseteq \mathbb{R}\subseteq \mathbb{C}$

Αξιώματα Peano
i) $\exists N\neq\emptyset$
ii) $\forall a\in N$ $\exists! s(a)\in N$
iii) $s(a)=s(b) \Leftrightarrow a=b$
iv) $\exists! 1$ $1\neq s(a)$, $\forall a\in N$
v) $P(a)$, $a\in N$. $[P(1)$ & $(P(a)\Rightarrow P(s(a)))] \Rightarrow P(a)$, $\forall a\in N$

Με την ιδιότητα v (επαγωγή) φτιάχνω το σύνολο των φυσικών αριθμών

* Το σύνολο που κατασκευάσαμε με τα αξιώματα Peano είναι το $\mathbb{N}$
* Το σύνολο των $\mathbb{Z}$ κατασκευάζεται από τους $\mathbb{N}$ παίρνοντας τάξη.
Δηλαδή $(\kappa,\lambda)\in \mathbb{N}^2$ $(\kappa,\lambda)\sim(\kappa',\lambda') : \kappa+\lambda'=\kappa'+\lambda$

$\{[(\kappa,\lambda)]\ \kappa,\lambda\in \mathbb{N}\}=\mathbb{Z}$

Το συνολο των $\mathbb{Q}$

(p,q) $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$

$(p,q)\sim(p',q') \Leftrightarrow pq'=p'q$

$$\{\underbrace{[(p,q)]}_{p/q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}\}=\mathbb{Q}$$

Το συνολο των $\mathbb{R}$

$S=\{(x_\nu),\ x_\nu\in\mathbb{Q}:\ x_\nu\to 0\}$

$\forall \varepsilon\in\mathbb{Q}^+$

$\exists \nu_0\ \ -\varepsilon<x_\nu<\varepsilon$

$\forall \nu\geq\nu_0$

$J=\{(x_\nu):\ (x_\nu)$ βασικη$\}$

$(x_\nu)\sim(x_\nu'):\ (x_\nu-x_\nu')\in S$

$\{[(x_\nu)]\ x_\nu\in J\}=\mathbb{R}\to$ καθε βασικη ακολουθια συγκλινει

αρα το συνολο $\mathbb{R}$ ειναι πληρες

Ιστορικη αναδρομη

1572 Bombelli

$a^3+a=k$, $\exists\ x$ $x^2=-1$

1693 Leibnitz

1777 Euler

Αποδειξε οτι $\exists k$ $k^2=-1$

- Ο Gauss, οριζε το συνολο των $\mathbb{Q}$

- Quaternions: 1843 Hamilton

$x=a_0 1+a_1 i+a_2 j+a_3 k$ $\quad a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$

$i^2=j^2=k^2=-1=ijk$

- 1924 Παύλι

- Το σύνολο των $\mathbb{C}$

(a,β), $a,\beta \in \mathbb{R}$

$(a,\beta)+(a',\beta') = (a+a', \beta+\beta')$
$(a,\beta)\times(a',\beta') = (aa'-\beta\beta', a\beta'+a'\beta)$

} Η πρόσθεση και ο πολ/σμος κλειστή πράξη

$(0,0)$ ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης
$(-a,-\beta)$ αντίθετο του (a,β)

$(1,0)$ ουδέτερο στοιχείο του πολ/σμού [ισχύει $(1,0)\times(a,\beta)=(a,\beta)$]

$(a,\beta)\neq(0,0) \to (a,\beta)(x,y)=(1,0) \Rightarrow (ax-\beta y, ay+\beta x)=(1,0) \Rightarrow$

$ax-\beta y=1$ $\Big|\Rightarrow ax+\frac{\beta^2}{a}x=1 \Rightarrow x=a/a^2+\beta^2$

$\beta x+ay=0 \Rightarrow y=-\frac{\beta}{a}x$ $\qquad y=-\frac{\beta}{a^2+\beta^2}$

Άρα το αντίστροφο στοιχείο είναι $(a,\beta)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+\beta^2}, -\beta/a^2+\beta^2\right)$

Άρα είναι σώμα $\qquad (a,\beta)\neq(0,0)$

Ισχύει: $(a,0)+(a',0)=(a+a',0)$
$(a,0)(a',0)=(aa',0)$ } ένα υποσύνολο, ισομορφο του $\mathbb{R}$

- Το $(1,0)\leftrightarrow 1$ (αντιστοιχεί στο 1)
Το $(0,0)\leftrightarrow 0$ (αντιστοιχεί στο 0)

- $(0,1)\times(0,1)=(0-1,0)=(-1,0)=-1$
Άρα $i^2=-1$

- $(a,\beta)=(a,0)+(0,\beta)=a+(\beta,0)\times(0,1)=a+\beta i \Rightarrow \mathbb{C}$

$(a,\beta)=a+\beta i \to$ αλγεβρική παράσταση $\qquad \mathbb{C}=\{a+i\beta : a,\beta\in\mathbb{R}\}$

Ιδιότητες μιγαδικών

1) $-(a+i\beta)=-a+i(-\beta)=-a-\beta i$

2) $a+\beta i\neq 0 \Rightarrow (a+\beta i)^{-1}=a/a^2+\beta^2 - i\beta/a^2+\beta^2$

Προτ. 1.2.1 σελ 10
$a+i\beta = a'+i\beta' \Rightarrow a=a'$ κ' $\beta=\beta'$

Απόδειξη

$a-a' = i(\beta-\beta')$

$(a-a')^2 = i^2(\beta-\beta')^2$ $\quad 0=(a-a')^2 = -(\beta-\beta')^2$

Άρα $a=a'$ κ' $\beta=\beta'$

π.χ. $(5x+3i)+(4y-3xi) = 1-i \quad x,y\in\mathbb{R}$

$5x+4y+i(3-3x) = 1-i$

$5x+4y=1 \quad 3-3x=-1$

- Οι ταυτότητες του $\mathbb{R}$ ισχύουν και στο $\mathbb{C}$
- Οι ιδιότητες των ανισοτήτων του $\mathbb{R}$ ΔΕΝ ισχύουν στο $\mathbb{C}$

Το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι διατεταγμένο σώμα, δηλαδή είναι ένα σώμα που περιέχει τη διάταξη

Για να είναι διατεταγμένο πρέπει να ισχύει ότι:

$x<y$ κ' $a<0$

$ax<ay$

$x'<y' \rightarrow x+x'<y+y'$

Πρόταση 1.3.1 σελ 12

Έστω ότι $\exists <$ τέτοια ώστε το $\mathbb{C}$ να είναι διατεταγμένο. Τότε πρέπει: $a<b \Rightarrow, a'<b' \Rightarrow a+a'<b+b'$

κ' $0<c \quad ac<bc$

$i\in\mathbb{C}$ $0<i$, $i<0$, $i\neq 0$

$0<i$

$0<i$

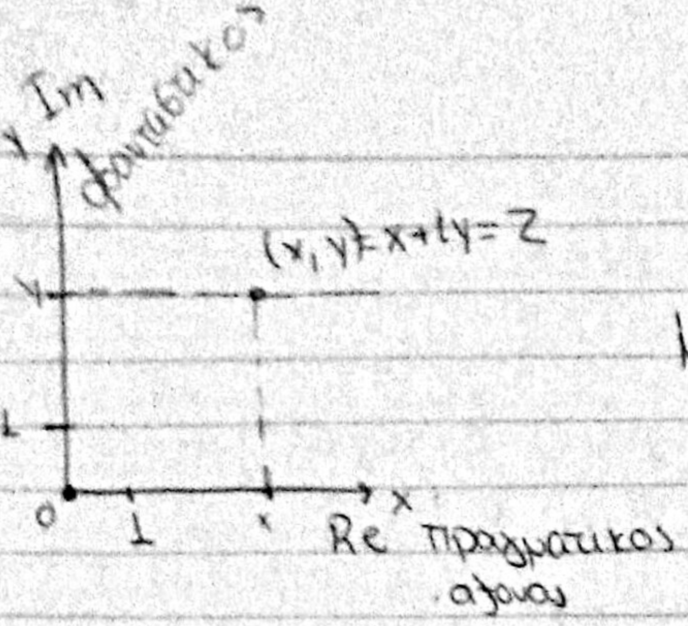
$\left.\begin{array}{l} 0<i^2=-1 \\ 0<-1 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0<-1 \\ 0<i \end{array}\right| \Rightarrow 0<-i$ κ' $0<i \rightarrow 0<-i+i=0$ άτοπο

πχ $a+i\beta < a'+i\beta'$: $a<a'$ κ' $a=a'$: $\beta<\beta'$

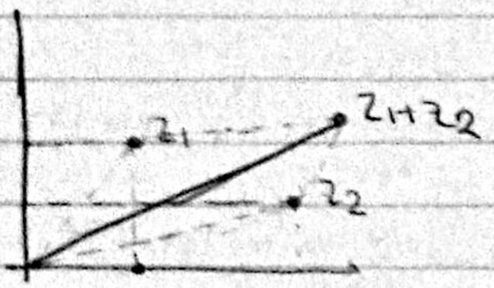
Άρα $(a,\beta),(a',\beta')$: $a\beta < a'\beta'$

Λεξικογραφική διάταξη

ΔΕΝ καθιστά το $\mathbb{C}$ διατεταγμένο



▷ Το καρτεσιανο γινομενο του $\mathbb{R}$ με τον εαυτο του ταυτιζεται με το επιπεδο ($\mathbb{R}^2$)



Μετρο του z $\quad |z|^2 = x^2+y^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|z|=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0 \Leftrightarrow z=0$

i) $|z| \geq 0$ κ $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

ii) $|z \cdot w| = |z||w|$

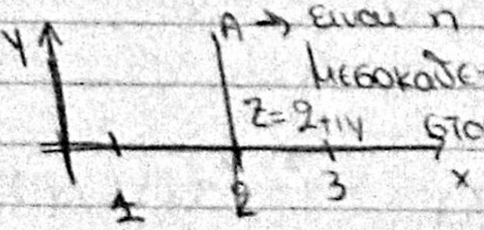
π.χ. $\left.\begin{array}{l} z=x+iy \\ w=a+\beta i \end{array}\right| \Rightarrow z\cdot w = (x+iy)(a+\beta i) = xa - y\beta + i(x\beta + ya)$

iii) $|z+w| \leq |z+u|+|u+w|$ τριγωνικη ιδιοτητα

π.χ. Να βρεθει το συνολο $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z-3|\}$

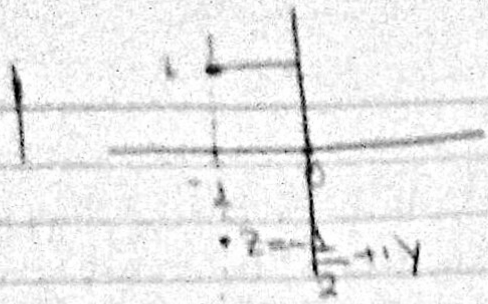
$|z-1|$ ↓ ποσο απεχει το z απο το 1

$|z-3|$ ↓ ποσο απεχει το z απο το 3



A → Ειναι η μεσοκαθετος καθε στοιχειο ισαπεχει απο τα ακρα του

$A' = \{z \;|z-i| = |z+1-i|\} = \{z : |z-i| = |z-(-1+i)|\}$

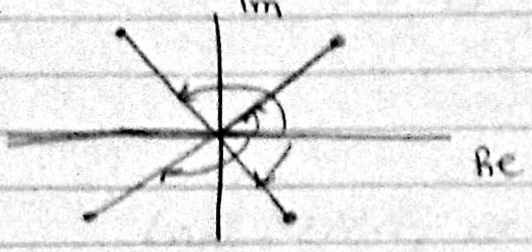


γ) $|x| \le z$
$|Re(z)| \le |z|$
$|Im(z)| \le |z|$

① 2^o τετ. $\theta = \tau o \xi \epsilon \phi\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$
3^o τετ. $\theta = \tau o \xi \epsilon \phi\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$
$\epsilon\phi\theta = \frac{y}{x}$
Άρα $\theta = \tau o \xi \epsilon \phi \frac{y}{x}$

• $\theta = arg(z)$ όρισμα μιγα αριθμα $\eta\mu\theta = \frac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z|\eta\mu\theta$
$\|$
$Arg(z) + 2k\pi,\ k \in Z$ $\quad$ $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z|\sigma\upsilon\nu\theta$

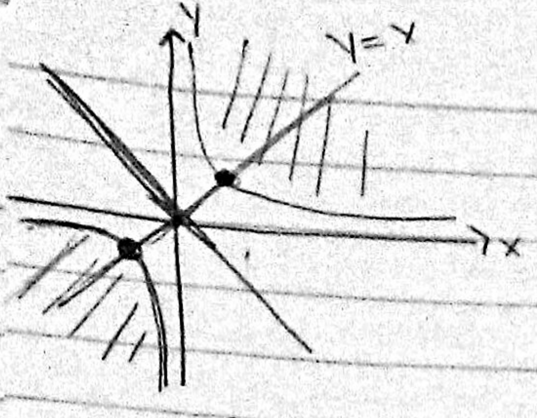
$\theta = Arg(z)$ Βασικό όρισμα



πχ $A = \{z\ Arg(z^2 - i) = \pi/2\}$
$z = x + iy$
Έστω $z^2 - i = J$
Άρα ουσιαστικά θέλω να βρω J, τέτοιο ώστε $Arg(J) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ το J είναι στο θετικό φανταστικό ημιάξονα

Δηλαδή: $Im(J) > 0$ κ' $Re(J) = 0$
$J = z^2 - i = x^2 - y^2 + 2ixy - i = x^2 - y^2 + i(2xy - 1)$
$2xy - 1 > 0$ κ' $x^2 - y^2 = 0$
$xy > \frac{1}{2}$ (1) $\quad$ $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$ (2)

Σχήμα πίσω $\Rightarrow$



Η (1) επαληθεύεται στα ///
Η (2) -//- στα X
Η (1) κ (2) -//- στα •

8) $z = |z|(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$

$w = |w|(\text{συν}\phi + i\,\text{ημ}\phi)$

$z \cdot w = |z||w|(\text{συν}\theta\,\text{συν}\phi - \text{ημ}\theta\,\text{ημ}\phi + i(\text{συν}\theta \cdot \text{ημ}\phi + \text{συν}\theta + \text{ημ}\phi)$

$= |z| \cdot |w|(\text{συν}(\theta+\phi) + i\,\text{ημ}(\theta+\phi))$

$\arg(z \cdot w) = \theta + \varphi = \arg(z) + \arg(w)$

Δ $z \cdot w = a \cdot 1$

$\frac{z}{a} = \frac{1}{w}$ → τα θεωρώ

πλευρές ενός τριγώνου

$|z \cdot w| = |a| \cdot 1 = a$